Liceo scientifico e opzione scienze applicate

3 Una variabile aleatoria, i cui valori appartengono all'intervallo [0; 2], è distribuita secondo la densità di probabilità data da $p(x) = k \cdot x^2(2 - x)$, dove k è una costante opportuna. Si stabilisca il valore medio della variabile aleatoria considerata.

3 La funzione $p(x) = kx^2(2-x)$ definisce una densità di probabilità sull'intervallo [0; 2] se è sempre positiva o nulla su tale intervallo e se

$$\int_0^2 p(x)dx = 1.$$

Per la positività, deve essere $k \geq 0$.
Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^2 p(x)dx = k\int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = k\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = k\left(\frac{2}{3}8 - \frac{1}{4}16\right) = \frac{4}{3}k.$$

Imponiamo che tale integrale definito sia uguale a 1:

$$\frac{4}{3}k = 1 \to k = \frac{3}{4}.$$

La densità di probabilità su [0; 2] è quindi definita da:

$$p(x) = \frac{3}{4}x^2(2-x).$$

Il valor medio della variabile casuale associata è dato da:

$$M = \int_0^2 x \cdot p(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^3 - x^4)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}16 - \frac{1}{5}32\right) = \frac{6}{5} = 1,2.$$