Liceo scientifico e opzione scienze applicate

7 Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:

- la distribuzione binomiale;
- la distribuzione di Poisson.

7 Consideriamo la variabile casuale discreta X che ha valori possibili $x = 0, 1, \ldots, 100$, definita come: «su 100 pezzi, x sono difettosi».

Risolviamo il quesito con la distribuzione binomiale.

La probabilità che un singolo pezzo sia difettoso è pari alla frequenza relativa: $p = 3\% = 0{,}03$. La probabilità che un pezzo non sia difettoso è quindi $1 - p = 0{,}97$. Se consideriamo la distribuzione X come binomiale, la probabilità che, su 100 pezzi, esattamente 2 siano difettosi, si può esprimere come la probabilità che, su 100 eventi indipendenti di probabilità p, ne siano realizzati 2:

$$P(X = 2) = \binom{100}{2} p^2 (1 - p)^{98} = \frac{100 \cdot 99}{2} (0{,}03)^2 (0{,}97)^{98} \simeq 0{,}225.$$

Applichiamo ora la distribuzione di Poisson. Tale distribuzione dà un'approssimazione della distribuzione binomiale, che risulta buona quando il numero di eventi è alto e la probabilità del singolo evento favorevole è piccola, come in effetti succede nel caso che stiamo trattando.

Per utilizzare la distribuzione di Poisson bisogna calcolare il parametro $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}03 = 3$.

La probabilità che si verifichino 2 eventi è data da:

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{3^2}{2} \cdot e^{-3} \simeq 0{,}224.$$

Osserviamo che l'approssimazione di Poisson dà un risultato che si discosta da quello della distribuzione binomiale solo nella terza cifra decimale, con un errore assoluto di un millesimo.