Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

6 Determinare la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo [2; 5] con una distribuzione uniforme. Determinare inoltre il valore medio, la varianza, la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4}$.

---

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

6 In generale, la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua X definita su $[a; b]$ avente distribuzione uniforme è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b. \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Il valor medio e la varianza si calcolano rispettivamente con le formule:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

La variabile casuale X definita su $[2; 5]$ e con distribuzione uniforme ha dunque la seguente funzione densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 2 \le x \le 5, \\ 0 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

e i seguenti indici:

valore medio $\quad M(X) = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2},$

varianza $\quad \text{var}(X) = \frac{(5-2)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4},$

deviazione standard $\quad \sigma = \sqrt{\text{var}(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Calcoliamo la probabilità richiesta con l'integrale definito della funzione densità:

$$p\left(\frac{7}{3} \le x \le \frac{17}{4}\right) = \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{17}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{17}{4}} \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}[x]_{\frac{7}{3}}^{\frac{17}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{17}{4} - \frac{7}{3}\right) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{51-28}{12} = \frac{23}{36} \simeq 0,64.$$