Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

3 Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:

a. qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?

b. descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

---

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

3 Indichiamo con $p = 0,15$ la probabilità che una persona della popolazione sia influenzata.

a. Consideriamo la variabile casuale discreta $X =$ «numero di alunni influenzati». Tale variabile segue una distribuzione di probabilità binomiale. Possiamo quindi calcolare la probabilità che più di due alunni, in una classe di 20 alunni, siano a casa influenzati mediante la differenza:

$$p(X > 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) - p(X = 2).$$

Calcoliamo separatamente i diversi termini:

$$p(X = 0) = \binom{20}{0} p^0 (1 - p)^{20} = 1 \cdot 1 \cdot 0,85^{20} \simeq 0,039 \rightarrow 3,9\%,$$

$$p(X = 1) = \binom{20}{1} p^1 (1 - p)^{19} = 20 \cdot 0,15 \cdot 0,85^{19} \simeq 0,137 \rightarrow 13,7\%,$$

$$p(X = 2) = \binom{20}{2} p^2 (1 - p)^{18} = 190 \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{18} \simeq 0,229 \rightarrow 22,9\%.$$

Risulta dunque:

$$p(X > 2) \simeq 1 - 0,039 - 0,137 - 0,229 = 0,595 \rightarrow 59,5\%.$$

La probabilità che siano a casa influenzati almeno 3 studenti della classe è quasi il 60%.

b. Più in generale, riferendosi alla popolazione di 500 studenti della scuola, la probabilità che ce ne siano più di 50 a casa ammalati è data da:

$$p(X > 50) = 1 - \sum_{n=0}^{50} p(X = n) = 1 - \sum_{n=0}^{50} \binom{500}{n} 0,15^n \cdot 0,85^{500-n}.$$

I calcoli in questo caso sono molto laboriosi e per il loro sviluppo sarebbe opportuno ricorrere a un foglio elettronico. Potendo implementare il calcolo a computer, si trova:

$$p(X > 50) \simeq 0,999 \rightarrow 99,9\%.$$