

- 4** Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

- 4 Consideriamo la variabile casuale X corrispondente al numero di risposte esatte. Per ognuna delle domande, la probabilità di dare la risposta corretta è $\frac{1}{4}$. La variabile casuale X ha quindi una distribuzione di probabilità binomiale (o di Bernoulli) di parametri $n = 10$ e $p = \frac{1}{4}$.

Questo significa che la probabilità che le risposte esatte siano x è:

$$P(X = x) = \binom{10}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x},$$

con $x \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

La probabilità di superare il test è dunque:

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \\ &= \binom{10}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \\ &= \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{1}{4^8} \cdot \frac{3^2}{4^2} + 10 \cdot \frac{1}{4^9} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4^{10}} \cdot 1 = \frac{405}{4^{10}} + \frac{30}{4^{10}} + \frac{1}{4^{10}} = \frac{436}{4^{10}} \simeq 4 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$